

5.5 Oase

Titel	V2 – 5-Z1 Oase
Version	Mai 2011
Themenbereich	Anwendungsaufgaben zur Differenzialrechnung
Themen	Optimierung von Strecken
Rolle des GTR	Lösen von Gleichungen Berechnungen von Ableitungen Umformungen von Termen
Methoden Hinweise	
Quelle	Das Bild stammt aus der Sammlung Wikimedia Commons und wird dort unter dem Namen Oasis in Lybia.jpg geführt. ({{Information Description=Oasis in Lybia Source=self-made Date=17.05.2005 Author= Sfivat }}) http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oasis_in_Lybia.jpg?uselang=de#file
Zeitlicher Rahmen	1 Schulstunde

Von der mittleren zur lokalen Änderung

Eine fernöstliche Extremwertaufgabe

Am Rande der Öde Gobi liegen die beiden Oasen „Zum saufenden Drachen“ (kurz D-Oase) und „Bei den durstigen Kamelen“ (kurz K-Oase) genau 270 LI voneinander und auf der gleichen Seite der kaiserlichen Heerstraße, jeweils genau 60 LI von dieser entfernt.

Der Geschäftsmann Kao Fang handelt in der D-Oase und will seinen Geschäftspartner Lo Kwan in der K-Oase besuchen.



Er könnte die Strecke direkt durch die Wüste zurücklegen – jedoch müsste er einen erheblichen Wasservorrat mitnehmen, was die Reisekosten für die Karawane in die Höhe trieb. Man rechnet bei Wüstenritten mit einem Kostenaufwand von 800 YUAN pro LI.

Kao Fang könnte jedoch auch zunächst schräg durch die Wüste zur Heerstraße reiten, dann auf dieser wesentlich kostengünstiger reisen, um dann wieder schräg durch die Wüste die K-Oase zu erreichen. Auf der Heerstraße gibt es nämlich einige (Wasser-) Tankstellen, sodass dort nur 200 YUAN pro LI zu veranschlagen sind.

- Fertigen Sie eine Skizze an, die den Sachverhalt eines Weges über die Heerstraße widerspiegelt.
- Berechnen Sie die Kosten, die bei einem direkten Ritt von der D-Oase zur K-Oase entstünden?
- Geben Sie mindestens 2 weitere Wege an, die zum Teil über die Heerstraße führen. Berechnen Sie die Kosten für diese Wege.
- Berechnen Sie die mindestens entstehenden Kosten, wenn er die Heerstraße genau 200 LI lang benutzt.
- Untersuchen Sie, wie er reisen muss, um die Kosten zu minimieren. Berechnen Sie die dazu gehörenden Kosten.

Hinweise: Diese Aufgabe ist auch ohne Differenzialrechnung lösbar. Benutzen Sie zu Übung trotzdem die Methoden der Differenzialrechnung.

Das chinesische Längenmaß ist wie folgt umzurechnen:

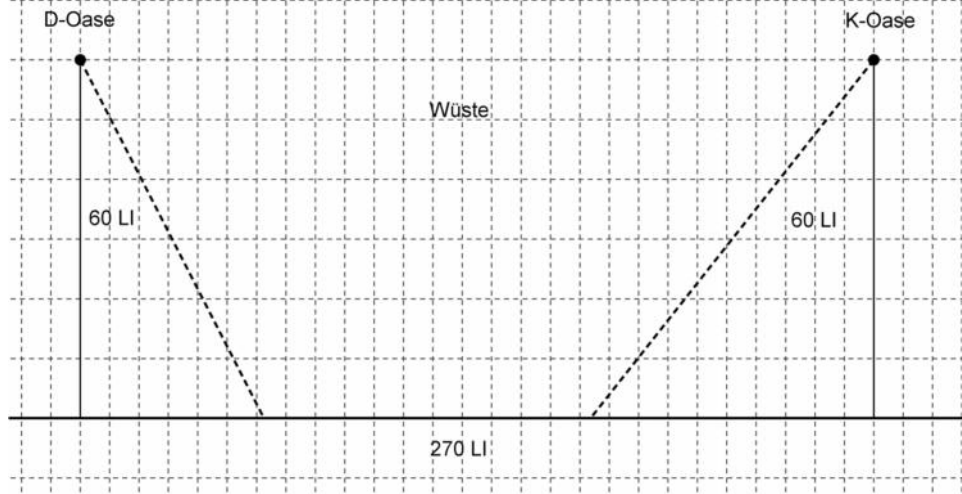
$$1 \text{ LI} = 18 \text{ YIN} = 180 \text{ ZHANG} = 1800 \text{ CHI} = 18000 \text{ CUN} = 576 \text{ m}$$

Für die Währung gilt:

$$1 \text{ YUAN} = 10 \text{ JIAO} = 100 \text{ FEN} = 0,1232 \text{ €}$$

Von der mittleren zur lokalen Änderung

a.

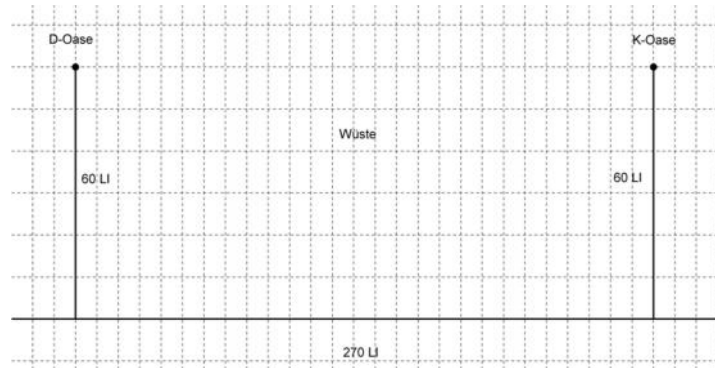


b. An Kosten entstehen $270 \cdot 800 \text{ Yuan} = 216\,000 \text{ Yuan}$.

c. • Von der D-Oase direkt zur Heerstraße, dort 270 LI zurücklegen und anschließend wieder auf den direkten zur K-Oase.

An Kosten entstehen

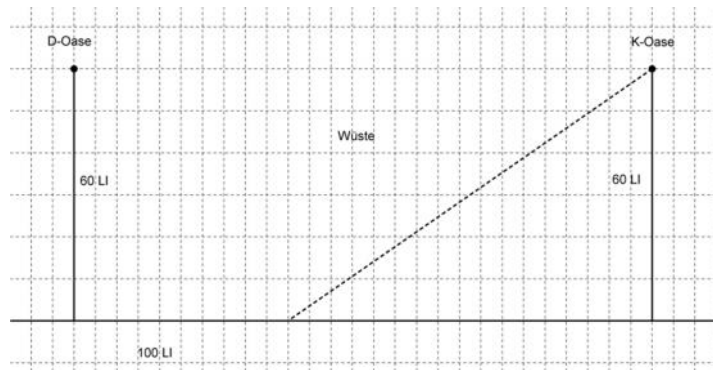
$$120 \cdot 800 \text{ Yuan} \\ + 270 \cdot 200 \text{ Yuan} \\ = 150.000 \text{ Yuan}$$



• Von der D-Oase direkt zur Heerstraße, dort 100 LI zurücklegen und anschließend auf den direkten zur K-Oase.

An Kosten entstehen

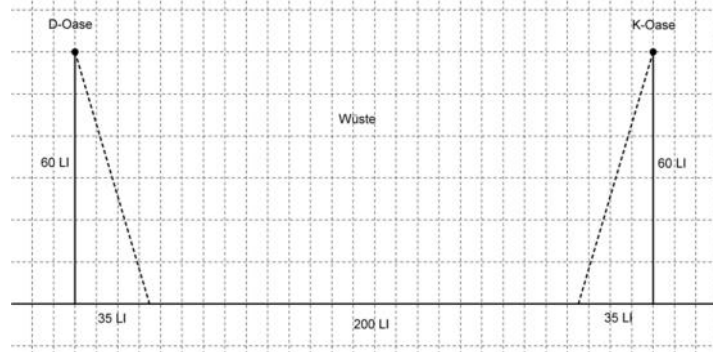
$$60 \cdot 800 \text{ Yuan} \\ + 100 \cdot 200 \text{ Yuan} \\ + \sqrt{170^2 + 60^2} \cdot 800 \text{ Yuan} \\ \approx 212.222 \text{ Yuan}$$



d. Der günstigste Weg ist (achsen-) symmetrisch.

An Kosten entstehen

$$2 \cdot \sqrt{35^2 + 60^2} \cdot 800 \text{ Yuan} \\ + 200 \cdot 200 \text{ Yuan} \\ \approx 151.140 \text{ Yuan}$$



Von der mittleren zur lokalen Änderung

- e. Der günstigste Weg ist (achsen-) symmetrisch.
Die Kosten K sind von x abhängig.

$$K(x) = 2 \cdot \sqrt{x^2 + 60^2} \cdot 800 \text{ Yuan} + (270 - 2x) \cdot 200 \text{ Yuan}$$

Zur Ermittlung der minimalen

Kosten wird erst einmal die erste Ableitung der Kostenfunktion gleich null gesetzt und die entsprechende Gleichung mithilfe des solve-Befehls gelöst.

Als einzige Lösung erhält man $x_E \approx 15,5$ mit den Gesamtkosten von

$K(15,5) \approx 146.952$ Yuan. Da diese Gesamtkosten geringer als die Gesamtkosten aus dem Aufgabenteil d) sind, ist x_E eine Minimumstelle.

Die geringsten Kosten entstehen, wenn Kao Fang 239 LI auf der Heerstraße zurücklegt, wobei der Weg symmetrisch ist. An Gesamtkosten entstehen ungefähr 146.952 Yuan.

